Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ
!!! μόνον άρτιοι !!!			

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ Α.Μ.
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
02 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016

1. Εξετάστε αν ισχύει καθένα από τα ακόλουθα. Αν ισχύει, δώστε **πλήρη απόδειξη**. Αν δεν ισχύει, δώστε κατάλληλο **αντιπαράδειγμα**.

(i) **(2%)** Αν $0 < a_\nu < b_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, και η $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, τότε και η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

(ii) **(2%)** Αν μια υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $l \in \mathbb{R}$, τότε και ολόκληρη η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο l.

(iii) **(2%)** Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(iv) **(2%)** Αν $l \in \mathbb{R}$ και $\lim |a_\nu| = |l|$ τότε $\lim a_\nu = l$.

(v) **(2%)** Αν $l \in \mathbb{R}$ και $\lim a_\nu = l$, τότε $\lim \dfrac{1}{a_\nu} = \dfrac{1}{l}$.

(vi) **(2%)** Αν η f δεν ορίζεται στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$, τότε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

(vii) **(2%)** Αν $\xi \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi}(f(x) - g(x)) = 0$.

(viii) **(2%)** Αν η f είναι συνεχής στο $\xi \in \mathbb{R}$ τότε και η $\dfrac{1}{f}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο ξ.

(ix) **(2%)** Αν μια συνάρτηση παίρνει θετική τιμή σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε υπάρχει ολόκληρη περιοχή του πεδίου ορισμού της στην οποία αυτή παίρνει θετικές τιμές.

(x) **(2%)** Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη.

2. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \left\{5 - \frac{1}{\nu^2} :\ \nu \in \mathbb{N}\right\}.$$

(i) **(5%)** Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι φραγμένο.

(ii) **(5%)** Υπολογίστε το $\inf A$.

(iii) **(5%)** Υπολογίστε το $\sup A$.

(iv) **(5%)** **Αν υπάρχουν** τα $\min A$ και $\max A$ υπολογίστε τα, **αλλιώς** αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν.

3. **(10%)** Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε $\lim b_n = 0$, τότε αποδείξτε ότι $\lim(a_n b_n) = 0$.

4. **(15%)** Χρησιμοποιώντας τον $(\epsilon - \delta)$ **ορισμό** της συνέχειας, αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία είναι συνεχής συνάρτηση.

5. **(15%)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (1,5) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x}{2}\cos^2\left(\frac{1}{x^2-1}\right) + \sin\left(\frac{1}{x^2-1}\right), \quad x \in (1,5).$$

Χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα του Bolzano**, αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $(1,5)$ τέτοια ώστε $\lim f(a_n) = 0$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) **(10%)** Χρησιμοποιώντας **ακολουθίες**, αποδείξτε ότι η συνάρτηση f **δεν** είναι φραγμένη.

(ii) **(10%)** Χρησιμοποιώντας τον σχετικό **ακολουθιακό** ορισμό, αποδείξτε ότι **δεν** υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.